

Reihe:

INSTITUT FÜR BAUSTOFFKUNDE UND STAHLBETONBAU DER TU BRAUNSCHWEIG

DIREKTOREN: PROF. DR.-ING. K. KORDINA - PROF. DR.-ING. G. REHM

BERICHT III

ZUM FORSCHUNGSVORHABEN

BERÜCKSICHTIGUNG DER TORSIONSSTEIFIGKEIT VON RANDBALKEN BEI STAHLBETONDECKEN

VON

Josef *Georg*
J. EIBL UND G. IVÁNYI

BRAUNSCHWEIG 1972



Berechnung von Plattenbalken mit Hilfe der Methode
"Finiter Elemente"

Bericht III

zum Forschungsvorhaben

Berücksichtigung der Torsionssteifigkeit von Randbalken
bei Stahlbetondecken

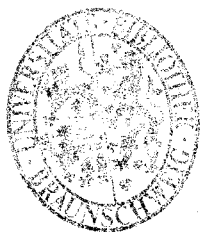
von

AV u. Prof. Dr.-Ing. J. Eibl

und

Dr.-Ing. G. Iványi

Braunschweig, April 1972



Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Allgemeines	2
2. Theoretische Grundlagen	3
2.1 Art der Approximation	3
2.1.1 Balken	4
2.1.2 Scheibe	6
2.1.3 Platte	8
2.2 Koppelung der Elemente	8
2.2.1 Transformation der Balkensteifigkeitsmatrix	10
2.2.2 Transformation der Flächenelementsteifigkeitsmatrix	11
3. Beschreibung des Rechenprogramms	13
3.1 Automatischer Aufbau der geometrischen Daten	13
3.2 Herstellung der Elementsteifigkeitsmatrizen	14
3.3 Abschnittsweise Aufbau der globalen Steifigkeitsmatrix	14
3.4 Lastunabhängiger Lösungsprozeß	15
3.5 Eingabe der Belastungsdaten	16
3.6 Lastabhängiger Lösungsprozeß	16
3.7 Ausgabe der Verschiebungsgrößen	17
3.8 Rechenzeiten	17
4. Einige Testergebnisse	18
4.1 Nachrechnung der Modellversuche von Sommerfeld	18
4.2 Nachrechnung der Torsionsversuche von Kordina/Waubke	20
5. Zusammenfassung	21
Literatur	22
<u>Anlage</u>	23
Auflösung großer, symmetrischer Gleichungssysteme mit der Cholesky-Methode - Programmbeschreibung	
1. Methode	24
2. Numerische Durchführung, Speicherbedarf	25
3. Beschreibung der Unterprogramme	28
4. Flußdiagramme für die einzelnen Lösungsarten	32
4.1 Direktlösung	32
4.2 Lösung für Bandstrukturen	33
5. Liste der Unterprogramme	37

1. Allgemeines

In dem vorangegangenen Bericht II zum Forschungsvorhaben "Berücksichtigung der Torsionssteifigkeit von Randbalken bei Stahlbetondecken" wurde ausgeführt, daß nach Meinung der Verfasser die Untersuchungen mit dem einfachen Modell eines zweistegigen, auf Torsion beanspruchten Plattenbalkens begonnen werden sollten, zumal sich hierbei ohne zusätzlichen Aufwand auch wertvolle Ergebnisse für den Massivbrückenbau gewinnen lassen. Zur Vorbereitung dieser inzwischen durchgeführten Versuche (Bild 1) war ein Rechenverfahren

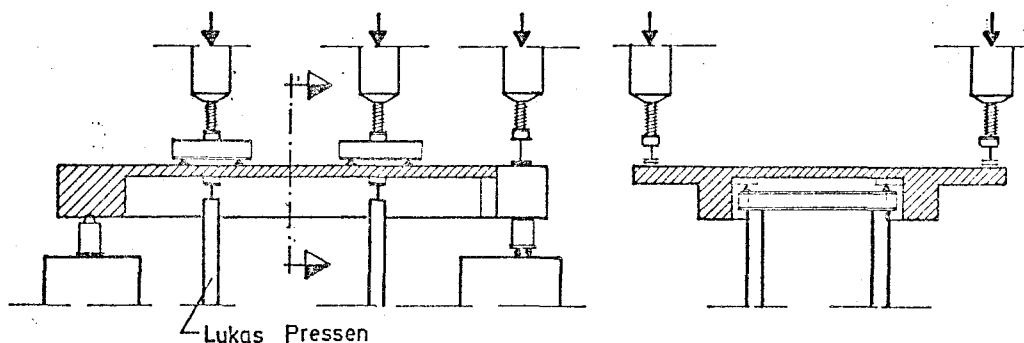


Bild 1

auf der Basis von [1] entwickelt worden. Die Rechenmethode zur Vor-dimensionierung der Versuchskörper und zur Überprüfung einer ersten Lastabtragungs-Hypothese erlaubt aber nur die Untersuchung des in Bild 2 dargestellten statischen Systems unter symmetrischer Torsionsbeanspruchung.

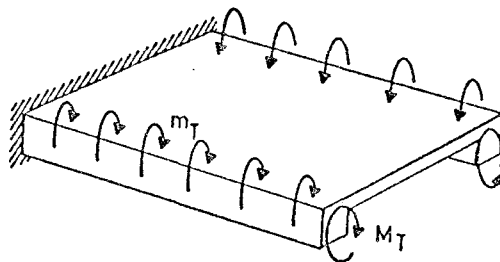


Bild 2

Für eine genaue Auswertung der Versuche kann daher dieses Verfahren nicht herangezogen werden, weil Einflüsse aus der tatsächlichen Lagerung und Belastung damit nicht verfolgt werden können. Im übrigen schien es mit Rücksicht auf die vorgesehene Erweiterung der Experimente auf komplexere Systeme, wie z.B. Stahlbetondecken mit einer größeren Anzahl von unterstützenden Balken sowie im Hinblick auf eine möglichst breite Anwendbarkeit der gewonnenen Erkenntnisse notwendig, ein allgemeineres Programm zu entwickeln. Dieses sollte es erlauben, die Beanspruchungen eines elastischen Plattenbalkensystems mit oder ohne Querträger bei beliebiger Belastung rechnerisch zu verfolgen.

Über die Entwicklung eines derartigen Programms auf der Basis "finiter Elemente" soll im folgenden berichtet werden.

2. Theoretische Grundlagen

Für eine allgemeine Beschreibung der gewählten Methode wird auf die einschlägige Literatur [2, 5, 6] verwiesen. Hier soll nur die spezifische Anwendung auf Plattenbalken näher erörtert werden.

2.1 Art der Approximation

Bei Verwendung der numerischen Methode "Finiter Elemente" wird das zu berechnende System jeweils in eine endliche Anzahl von beliebig geformten Elementen aufgeteilt, in deren Raster- oder Knotenpunkten bei der Deformationsmethode die Verformungsgrößen aus einem linearen Gleichungssystem ermittelt werden. Die unbekannten Knotenverformungen $\{\delta\}$ sind in diesen Gleichgewichtsbedingungen über die Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems $[K]$ mit reellen oder fiktiven Knotenkräften $\{b\}$ gekoppelt:

$$[K]\{\delta\} = \{b\}$$

Hierbei stellt $[K]$ die Summe der einzelnen Elementsteifigkeiten dar:

$$[K] = \sum_{i=1}^n [k_i]$$

Je nach der angestrebten Zielsetzung sind mehr oder weniger feine finite Übersetzungen notwendig. Im vorliegenden Fall genügt es, die Stege des Plattenbalkens durch Balkenelemente anzunähern, da besondere Anforderungen bezüglich der Querbiegung bzw. der "Scheibenbeanspruchung" der Stege nicht gestellt werden. Die Gurtplatte wird hingegen als Flächentragwerk mit einer Kombination von Scheiben- und Plattenelementen erfaßt, wobei auf "hochwertige" Elemente auch hier verzichtet werden kann, da Singularitäten u.ä. nicht interessieren.

2.1.1 Balken

Die Steifigkeitsmatrix eines Balkenelements im Koordinatensystem nach Bild 3 ist in Tabelle 1 wiedergegeben. Da die einzelnen Glieder dieser Matrix direkt aus der Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichungen für Biegung und Torsion resultieren, erübrigen sich weitere Betrachtungen hierzu.

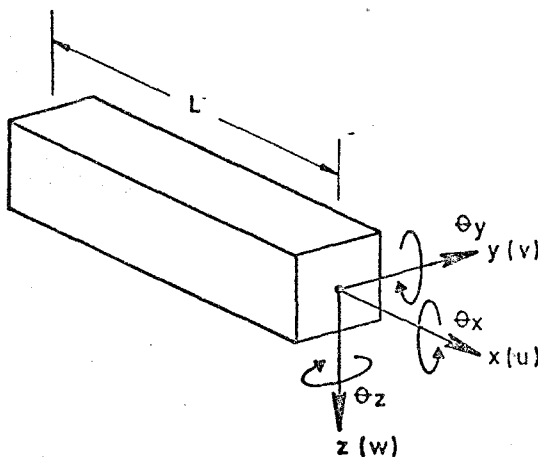


Bild 3

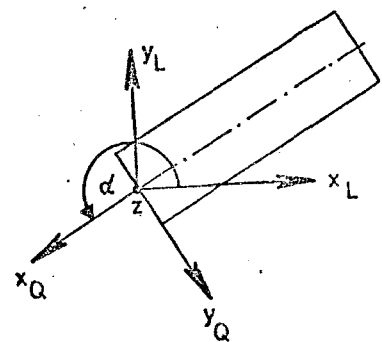


Bild 4

Die Steifigkeiten evtl. vorhandener Querträger, die ebenfalls als Balken approximiert werden, transformiert man zweckmäßigerweise auf das Koordinatensystem der Längsträger:

Tabelle 1 — Balkensteifigkeitsmatrix

$$[k_1] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} ; \quad [k_{12}] = [k_{21}]^T$$

$$\alpha = G/E$$

Reihenfolge der Verschiebungsgrößen:

$$[k_{11}] = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} F & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{12I_z}{L^2} & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{6I_z}{L} \\ \cdot & \cdot & \frac{12I_y}{L^2} & \frac{6I_y}{L} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4I_y & \cdot & \cdot \\ \text{Symm.} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha I_t & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{b}{a} 4I_z \end{bmatrix}$$

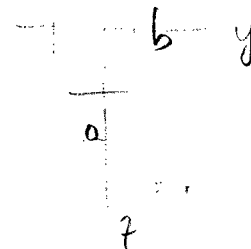
$$[k_{12}] = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -F & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{12I_z}{L^2} & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{6I_z}{L} \\ \cdot & \cdot & \frac{12I_y}{L^2} & \frac{6I_y}{L} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{6I_y}{L} & 2I_y & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\alpha I_t \\ \cdot & \frac{6I_z}{L} & \cdot & \cdot & \cdot & 2I_z \end{bmatrix}$$

$$[k_{22}] = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} F & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{12I_z}{L^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{6I_z}{L} \\ \cdot & \cdot & \frac{12I_y}{L^2} & \frac{6I_y}{L} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4I_y & \cdot & \cdot \\ \text{Symm.} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha I_t & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 4I_z \end{bmatrix}$$

CAL... (FF, FI_y, FI_z)

$$F = ab \quad I_y = \frac{ab^3}{12}$$

$$I_z = \frac{ba^3}{12}$$



$$[k_{QL}] = [L]^T [k_Q] [L];$$

$$[L] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & | & 0 \\ -s & c & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wobei $[k_{QL}]$ Steifigkeitsmatrix des Querträger-
elements in Längsträger-Koordinaten

$[L]$ Transformationsmatrix

$$\begin{array}{lcl} c & \cos \alpha &) \\ s & \sin \alpha &) \end{array} \quad (\text{nach Bild 4})$$

2.1.2 Scheibe

Zur Erfassung der "Scheibenbeanspruchung" wurde ein rechteckiges Element mit der einfachsten Ansatzfunktion für die u- und v-Verschiebungen gewählt (Bild 5). Die Güte

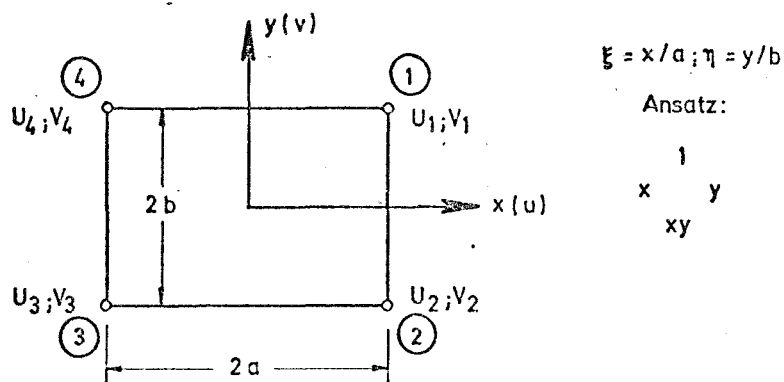


Bild 5

dieses Elementes entspricht in etwa der eines dreieckigen Elements mit linearem Ansatz. Die Elementsteifigkeitsmatrix (8 x 8) ist in Tabelle 2 wiedergegeben, die zugehörige Spannungsmatrix (3 x 8) ist in Tabelle 3.

Tabelle 2 — Scheibensteifigkeitsmatrix

Verschiebungsvektor

$$\{v\}^T = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4\}$$

$$[k] = \frac{Eh}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} k_1 & k_3 & k_5 & k_4 & k_7 & -k_3 & k_6 & -k_4 \\ & k_2 & -k_4 & k_8 & -k_5 & k_{10} & k_4 & k_9 \\ & & k_1 & -k_3 & k_6 & k_4 & k_7 & k_3 \\ & & & k_2 & -k_4 & k_9 & k_3 & k_{10} \\ & & & & k_1 & k_3 & k_5 & k_4 \\ \text{Symm.} & & & & & k_2 & -k_4 & k_8 \\ & & & & & & k_1 & -k_3 \\ & & & & & & & k_2 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \frac{4b}{a} + 2(1-\nu) \frac{a}{b} \quad k_6 = -\frac{4a}{b} + (1-\nu) \frac{a}{b}$$

$$k_2 = \frac{4a}{b} + 2(1-\nu) \frac{b}{a} \quad k_7 = -\frac{2b}{a} - (1-\nu) \frac{a}{b}$$

$$k_3 = \frac{3}{2} (1+\nu) \quad k_8 = -\frac{4a}{b} + (1-\nu) \frac{b}{a}$$

$$k_4 = \frac{3}{2} (1-3\nu) \quad k_9 = \frac{2a}{b} - 2(1-\nu) \frac{b}{a}$$

$$k_5 = \frac{2b}{a} - 2(1-\nu) \frac{a}{b} \quad k_{10} = -\frac{2a}{b} - (1-\nu) \frac{b}{a}$$

Tabelle 3 — Spannungsmatrix für Scheibe

$\{\sigma\} = [S]\{v\}$; für $\{v\}$ vgl. Tabelle 2

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau\}$$

$$[S] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} S_1 & \nu S_3 & S_2 & -\nu S_3 & -S_2 & -\nu S_4 & -S_1 & \nu S_4 \\ \nu S_1 & S_3 & \nu S_2 & -S_3 & -\nu S_2 & -S_4 & -\nu S_1 & S_4 \\ \bar{\nu} S_3 & \bar{\nu} S_1 & -\bar{\nu} S_3 & \bar{\nu} S_2 & -\bar{\nu} S_4 & -\bar{\nu} S_2 & \bar{\nu} S_4 & -\bar{\nu} S_1 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \frac{1+\eta}{a} ; S_2 = \frac{1-\eta}{a} ; S_3 = \frac{1+\xi}{b} ; S_4 = \frac{1-\xi}{b} ; \bar{\nu} = \frac{1-\nu}{2}$$

2.1.3 Platte

Das gewählte rechteckige Plattenelement mit drei Frei-
werten je Knotenpunkt und der zugehörigen unvollständigen
Ansatzfunktion ist in Bild 6 dargestellt. Die impli-

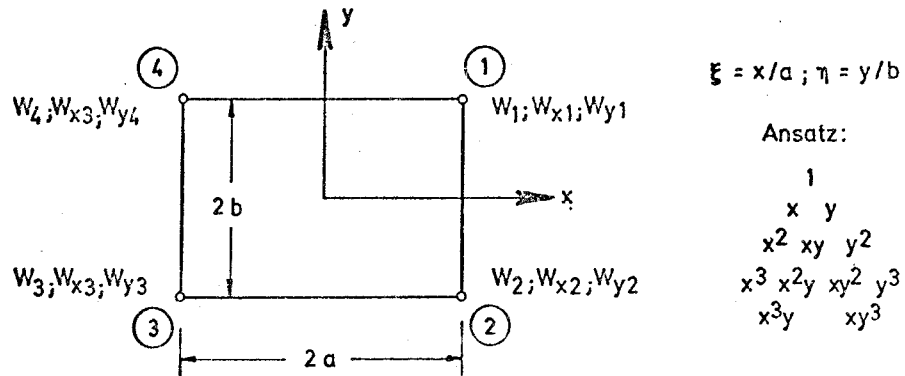


Bild 6

ziten Zusammenhänge für die Steifigkeitsmatrix (12 x 12)
sind in Tabelle 4, die für die Biegemomente in Tabelle 5
zusammengestellt.

2.2 Koppelung der Elemente

Mit Rücksicht auf ein beliebig wählbares Raster für ein ortho-
gonales Plattenbalkensystem (Bild 7) müssen die Steifigkeits-
anteile von Scheibe, Platte (Punkt i in Bild 7) und Längsträ-

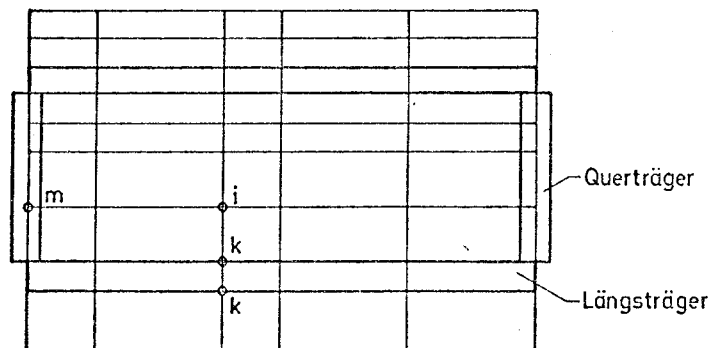


Bild 7

Tabelle 4 — Steifigkeitsmatrix der Platte

$$[k] = [B][k_q][B]^T$$

$$[B] = \begin{bmatrix} A & & \\ & A & \\ & & A \end{bmatrix}; \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[k_q] = D [k_{ij}] \quad (12 \times 12); \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$k_{22} = \frac{3b}{a^3}; \quad k_{2,5} = -\frac{3b}{a^2}; \quad k_{2,2} = -\frac{\nu}{a}$$

$$k_{33} = \frac{3a}{b^3}; \quad k_{3,8} = -\frac{\nu}{a}; \quad k_{3,9} = -\frac{3a}{b^2}$$

$$k_{44} = \frac{1}{5a^3b^3} (5a^4 + 5b^4 + 14a^2b^2 - 4\nu a^2b^2)$$

$$k_{47} = -\frac{1}{5a^2b} (5b^2 + 2a^2 + 3\nu a^2)$$

$$k_{40} = -\frac{1}{5ab^2} (5a^2 + 2b^2 + 3\nu b^2)$$

$$k_{5,5} = \frac{3b}{a}; \quad k_{5,12} = \nu; \quad k_{6,6} = \frac{b}{a}; \quad k_{6,11} = \nu$$

$$k_{77} = \frac{1}{5ab} (5b^2 + 2a^2 - 2\nu a^2); \quad k_{7,10} = \nu$$

$$k_{8,8} = \frac{1}{3ab} (2a^2 + b^2 - 2\nu a^2); \quad k_{8,9} = \nu$$

$$k_{9,9} = \frac{3a}{b}; \quad k_{10,10} = \frac{1}{5ab} (5a^2 + 2b^2 - 2\nu b^2)$$

$$k_{11,11} = \frac{a}{b}; \quad k_{12,12} = \frac{1}{3ab} (2b^2 + a^2 - 2\nu b^2)$$

Tabelle 5 — Spannungsmatrix der Platte

$$[m] = -[D][P][v]$$

$$[v]^T = \{w_1, w_{xi}, w_{yi}\} \quad i = 1, 2, 4, 3$$

$$[m]^T = \{m_x, m_y, m_{xy}\}$$

$$[P] = \begin{bmatrix} \cdot & \frac{3\xi}{a^2} & \cdot & -\frac{3\xi\eta}{a^2} & \frac{3\xi}{a} & \frac{1}{a} & \frac{3\xi\eta}{a} & \frac{\eta}{a} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\frac{3\eta}{b^2} & \frac{3\xi\eta}{b^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{3\eta}{b} & \frac{3\xi\eta}{b} & \frac{1}{b} & \frac{\xi}{b} \\ \cdot & \cdot & \cdot & P_{34} & \cdot & \cdot & P_{37} & \frac{2\xi}{b} & \cdot & P_{30} & \cdot & \frac{2\eta}{a} \end{bmatrix}$$

$$P_{34} = \frac{4-3\xi^2-3\eta^2}{ab}; \quad P_{37} = \frac{3\xi^2-1}{b}; \quad P_{30} = \frac{3\eta^2-1}{a}$$

ger (Punkt \underline{k} in Bild 7) bzw. von evtl. Querträgern (Punkt \underline{m} in Bild 7) in beliebigen Knotenpunkten addierbar sein. Deshalb sind die Steifigkeitsanteile der Flächenelemente (vgl. Bild 8) ebenso wie die exzentrisch angeschlossenen Querträgerelemente auf einen gemeinsamen "Koppelpunkt" - zweckmäßig wählt man den Schwerpunkt des Längsträgers - zu transformieren.

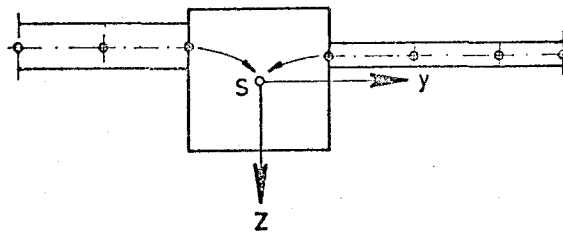


Bild 8

2.2.1 Transformation der Balkensteifigkeitsmatrix

Die Verschiebungsgrößen des Balkenschwerpunktes ($\{\delta_o\}$) werden auf einen beliebigen, in der Querschnittsebene liegenden Punkt A (vgl. Bild 9) wie folgt transformiert:

$$\{\delta_A\} = [T] \{\delta_o\}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & & -e_z & e_y \\ & 1 & e_z & \\ & & 1 & -e_y \\ 0 & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

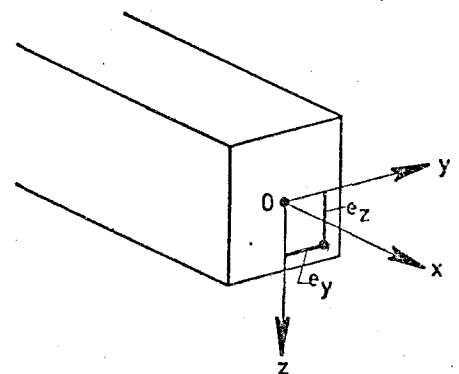


Bild 9

Für ein nach Bild 10 exzentrisch angeschlossenes Querträgererelement erhält man demnach

$$[k_{QLO}] = [T]^T [k_{QL}] [T]$$

wobei $[k_{QLO}]$ die auf den Schwerpunkt des Längsträgers bezogene Steifigkeitsmatrix des Querträgers bezeichnet.

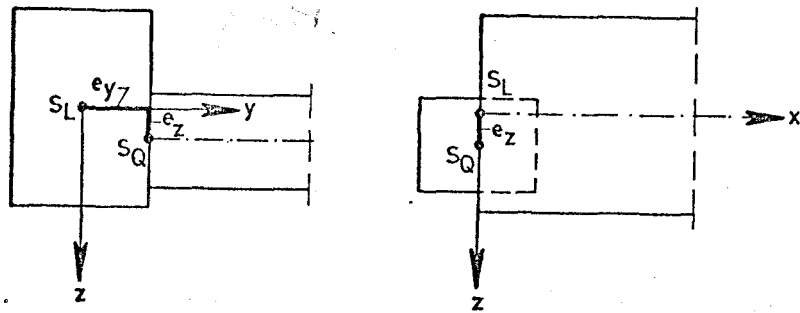


Bild 10

2.2.2 Transformation der Flächenelementsteifigkeitsmatrix

Addiert man in jedem Knotenpunkt eines Flächenelementes die Steifigkeitsanteile aus der Scheiben- und Plattenwirkung, so entstehen im vorliegenden Fall Untermatrizen 5×5 mit folgender Reihenfolge der Verschiebungsgrößen

$$u_i, v_i, w_i, w_{xi}, w_{yi}.$$

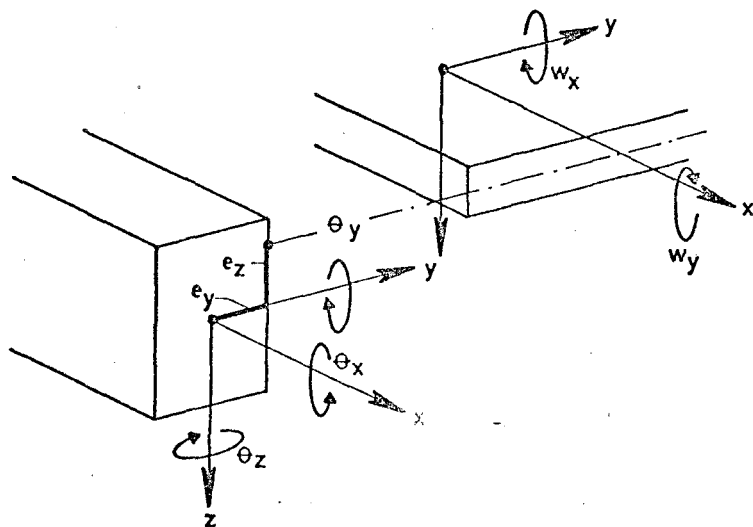


Bild 11

Die Zusammenhänge zwischen den Ableitungen der Plattendurchbiegung und den Balkenverdrehungen lauten:

$$\begin{aligned}w_{x,i} &= \varphi_y \\w_{y,i} &= -\varphi_x\end{aligned}\quad (\text{vgl. Bild 11}).$$

Drückt man den Verschiebungsvektor $\{v\}$ eines Flächenelement-Knotenpunktes durch den des Balkenelementes $\{\delta_A\}$ aus:

$$\{v\} = [A] \{\delta_A\}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

wobei nach 2.2.1

$$\{\delta_A\} = [T] \{\delta_0\}$$

so erhält man folgende Transformationsvorschrift für die Elementsteifigkeit:

$$\begin{aligned} [k_0] &= [G]^T [k] [G] \\ [G] &= [A][T] = \begin{bmatrix} 1 & . & . & -e_z & . \\ & 1 & . & . & e_z \\ & & 1 & . & -e_y \\ & 0 & & 1 & . \\ & & & & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. Beschreibung des Rechenprogrammes

Auf den in Abschnitt 2 behandelten Grundlagen wurde ein Rechenprogramm in der Programmiersprache FORTRAN erstellt. Mit Rücksicht auf die institutseigene IBM 1130-Rechenanlage (16K, Wechselplatten-speicher 524K) erschien es zweckmäßig, einen Programmaufbau zu-nächst für diese Anlage zu konzipieren und gleichzeitig alle Mög-lichkeiten eines Überganges auf Großrechenanlagen offenzuhalten.

Im einzelnen ergaben sich folgende Programmabschnitte:

3.1 Automatischer Aufbau der geometrischen Daten

Ausgehend von der Tatsache, daß umfangreiche Datensätze eine ständige Fehlerquelle bedeuten, wurde besonderer Wert auf eine einfache Eingabe der geometrischen Daten gelegt. Im vorliegen- den Fall genügen Angaben bezüglich der Systemabmessungen und der Rasterantei-lung. Eine Elementnumerierung o.ä. ist nicht notwendig.

Das mögliche statische System zeigt Bild 12. Aus praktischen Gründen sind dabei nur drei Auflagerzonen, d.h. Bereiche mit

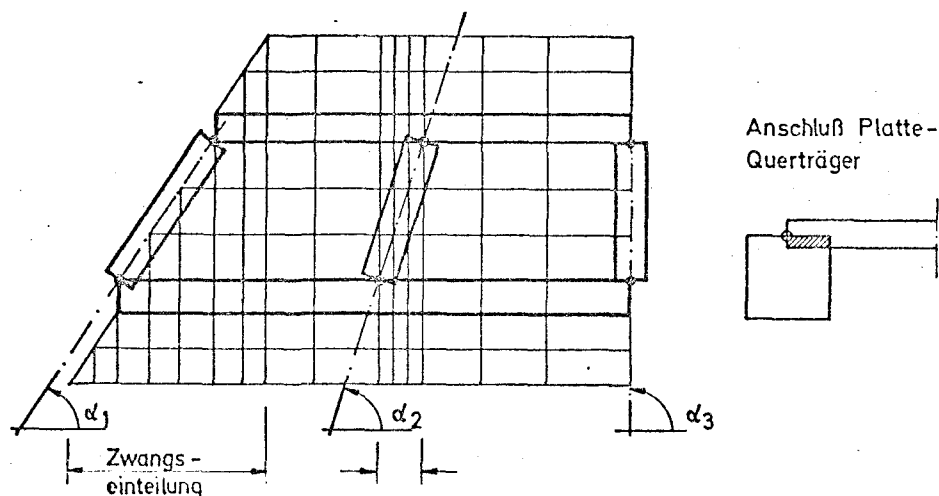


Bild 12

äußeren Randbedingungen, vorgesehen. Dieser Definition zufolge ist z.B. ein Kragarmende ebenfalls Auflagerbereich. Wenn Symmetriebedingungen in Feldmitte vorgegeben werden, ist auch die Berechnung eines Dreifeldträgers möglich (vgl. Bild 13).

Die einzelnen Konstruktionselemente des Plattenbalkens, wie Kragarm, Fahrbahnplatte, Längsträger (max. 2) und Querträger (max. 3) können untereinander verschieden sein; Vouten können nicht berücksichtigt werden.

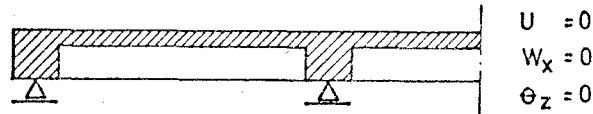


Bild 13

Vorgegeben sind die Quer- und Längseinteilungen; gleiche Rastermaße können mit je einer Datenkarte beschrieben werden. Bei vorgegebener Quereinteilung erfordern schiefe Auflagerbereiche nur eine Winkelangabe; die daraus resultierende Längseinteilung erfolgt intern. Aus den Eingabedaten werden alle Zuweisungs- und Transformationsvorschriften automatisch hergestellt, sämtliche Elemente nach den Abmessungen typisiert und ausgegeben.

3.2 Herstellung der Elementsteifigkeitsmatrizen

Auf Grund der Typenfestlegungen werden in diesem Programmteil die einzelnen unterschiedlichen Elementsteifigkeitsmatrizen nach Abschnitt 2 berechnet und auf der Platte gespeichert.

3.3 Abschnittsweise Aufbau der globalen Steifigkeitsmatrix

Der Aufbau der globalen Steifigkeitsmatrix erfolgt so, daß dabei eine tridiagonale Hypermatrix-Bandstruktur entsteht. Voraussetzung hierfür ist die in Bild 14 dargestellte Punktnummerierung. Die K_i -Matrizen resultieren aus den Steifigkeitsanteilen ii und ij , die C_i -Matrizen aus ii' , ij' und ih' . Sowohl in den K_i - als auch in den C_i -Matrizen ist dabei nur ein schmaler Streifen besetzt, was bei der Lösung des Gleichungssystems berücksichtigt wird. Die "äußere" Bandbreite ist von der Anzahl der Elemente in einem "Streifen" quer zur Trag-

richtung abhängig. Da die Flächenelemente in jedem Punkt nur 5. die Balkenelemente hingegen 6 unbekannte Verschiebungsgrößen enthalten, sind für die maximale Bandbreite die Auflagerberei-

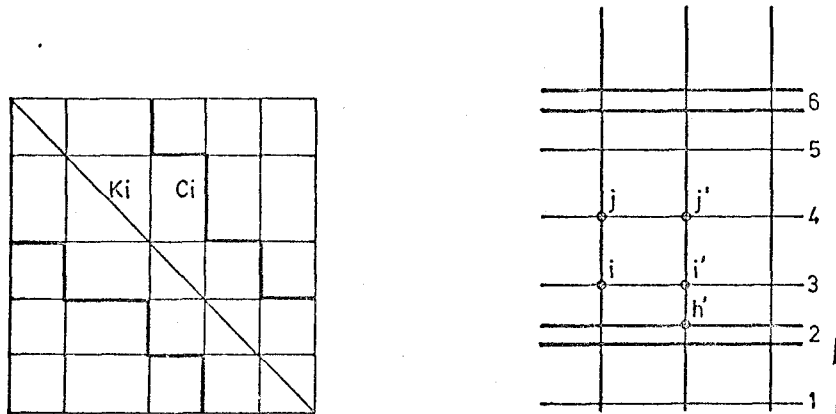


Bild 14

che mit Querträgern maßgebend. An einer IBM 1130-Rechenanlage können mit Rücksicht auf die Kernspeichergröße demnach max. 11 Elemente berücksichtigt werden.

Die Herstellung der globalen Steifigkeitsmatrizen erfolgt nur für "Rahmen" - Rasterlinien quer zur Tragrichtung - mit unterschiedlichen Eigenschaften. Ist die Längseinteilung bei einem Einfeldsystem über die ganze Länge konstant, so müssen nur die erste, eine mittlere und die letzte "Rahmen"-Steifigkeitsmatrix aufgebaut werden. Dabei werden jeweils die K- und C-Anteile getrennt ermittelt und linear - spaltenweise - gespeichert, bei den K-Anteilen aus Symmetriegründen nur das obere Dreieck.

Eine Vorgabe von Randwerten oder Federelementen ist nur in den Längsträgerpunkten vorgesehen, was den üblichen Lagerungsarten entspricht. Eine Einfach- oder Doppelsymmetrie wird vom Rechner automatisch genutzt.

3.4 Lastunabhängiger Lösungsprozeß

Wegen des symmetrischen Aufbaues der globalen Steifigkeitsmatrix kann die Lösung des Gleichungssystems mit Hilfe der Cholesky-Methode durchgeführt werden. Hierbei erfolgt zunächst eine Drei-

eckzerlegung:

$$[K] = [S]^T [S]$$

wobei $[S]^T$ die untere und $[S]$ die obere Dreiecksmatrix bezeichnet. Dieser Teil der Lösung ist unabhängig von der rechten Seite des Gleichungssystems und braucht für ein Tragwerk mit vorgegebenen Randbedingungen nur einmal durchgeführt zu werden.

Die Dreieckszerlegung erfolgt unter Beachtung des speziellen tridiagonalen Aufbaues der K-Matrix. Dabei wird berücksichtigt, daß die C-Matrizen nur entlang ihrer Diagonalen besetzt sind. Ein Vergleich mit den erforderlichen Rechenzeiten für eine vollbesetzte Matrix zeigt, daß dieser Umstand eine Zeitersparnis von $\sim 40\%$ mit sich bringt.

Eine detaillierte Beschreibung der Arbeitsweise des Lösungsprogramms findet sich in der Anlage zu diesem Bericht.

3.5 Eingabe der Belastungsdaten

Zur Zeit sind nur Einzelkräfte und Einzeltorsionsmomente als Belastungen vorgesehen. Eine Erweiterung auf andere Lastangriffe ist vorgesehen.

3.6 Lastabhängiger Lösungsprozeß

Der lastabhängige Lösungsprozeß besteht aus zwei Teilen

- einer Vorwärtslösung

$$[K] \{\delta\} = \{b\}$$

$$[S]^T [S] = [K]$$

d.h.

$$[S]^T \{f\} = \{b\}$$

in der der modifizierte Lastvektor $\{f\}$ ermittelt wird und

- einer Rückwärtslösung

$$[S] \{\delta\} = \{f\}$$

wobei die unbekannten Verschiebungsgrößen $\{\delta\}$ berechnet werden.

Die Größen auf der rechten Seite werden während des Lösungsprozesses zunächst mit $\{f\}$ und danach mit dem Lösungsvektor überspeichert.

Eine detaillierte Beschreibung der Unterprogramme ist in der Anlage zu finden.

3.7 Ausgabe der Verschiebungsgrößen

Derzeit werden nur die Verschiebungsgrößen für die einzelnen Lastfälle ausgegeben. Die Berechnung der Spannungen und Schnittkräfte befindet sich noch im Teststadium.

3.8 Rechenzeiten

Die beschriebenen sieben Hauptprogrammteile sowie einige Service-Programme für Kontrollausgaben bilden eine Programmkette, die ihre Datenzuführung über die Fix-Bereiche der Platte erhalten, während sie selbst im Benutzerbereich gespeichert sind. Hieraus folgt eine in etwa konstante Übergangszeit zwischen den einzelnen Programmteilen von je 60 sec. Nach Messungen betragen die übrigen Rechenzeiten

- | | |
|--|--------------------------------------|
| 1) Ein- und Ausgabe für 400 Unbekannte | 140 sec |
| 2) Elementsteifigkeitsmatrizen | 10 sec/Typ |
| 3) Rahmensteifigkeitsmatrizen
(t = Anzahl der Rahmentypen
e = Anzahl der Elemente in Querrichtung) | $3(t-1)e \cdot 4,5$ sec |
| 4) Lastunabhängige Lösung
(r = Anzahl der Rahmen
n = Anzahl der Gleichungen je Rahmen) | $r(2,1 \cdot 10^{-3} \cdot n^3)$ sec |
| 5) Lastabhängige Lösung
Etwa die Hälfte davon wird z.Zt. für Plattenübertragungen benötigt, die an einer Großrechenanlage später vermieden werden können. | 18 - 22 % von 4) |

Mit diesen Angaben können Rechenzeiten auf 5 - 10 % genau geschätzt werden. Einige Testläufe ergaben, daß der Umrechnungsfaktor zwischen Großrechenanlagen der dritten Generation und IBM 1130 in etwa 55 - 60 beträgt.

4. Einige Testergebnisse

Aus Testgründen wurden zunächst Ergebnisse vorliegender Kleinmodellversuche nachgerechnet. Dabei wurden das Konvergenzverhalten und die numerische Stabilität geprüft. Letzterer kommt bei einer IBM 1130-Rechenanlage besondere Bedeutung zu, da die Gleitkomma-Darstellung nur mit 6 - 7 Ziffern erfolgt (16-Bit-Worte).

4.1 Nachrechnung der Modellversuche von Sommerfeld [4]

Die Abmessungen und Belastung des aus St 37 hergestellten Modells sind in Bild 15 dargestellt. Die Elementeinteilungen für

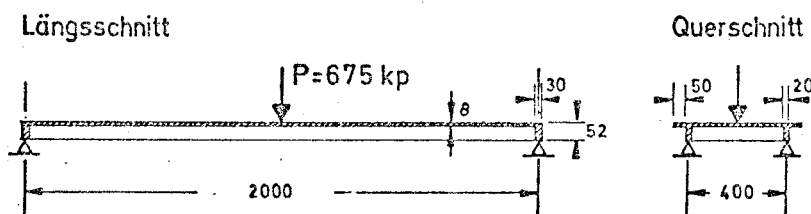
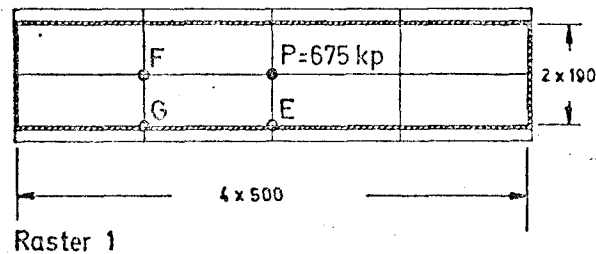


Bild 15

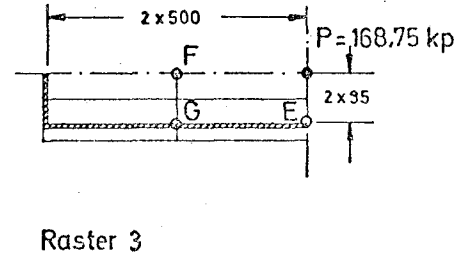
4 verschiedene Raster zeigt Bild 16. Die Rechen- und Meßwerte der Durchbiegungen in den Punkten E, F und G (vgl. Bild 16) sind in Tabelle 6 zusammengestellt.

In beiden Querschnitten liegen die Abweichungen zwischen Rechnung und Versuch in jedem Falle über 10 %. Mit einer größeren Anzahl von Elementen könnten wohl - dies haben Untersuchungen gezeigt - bessere Ergebnisse erreicht werden. Bei der vorhandenen kleinen Anlage ist dies jedoch nicht möglich, da eine Erhöhung der Anzahl der Unbekannten um den Faktor 1,5 in Raster 2 zu Rundungsfehlern von 30 - 40 % führte.

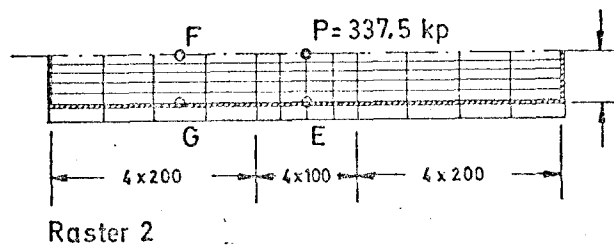
137 Unbekannte



65 Unbekannte



478 Unbekannte



283 Unbekannte

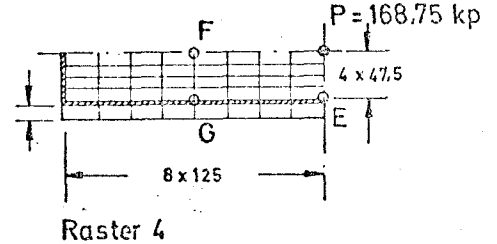


Bild 16

Tabelle 6

Raster	Punkt E			Punkt F			Punkt G		
	M	R	Δ	M	R	Δ	M	R	Δ
	[mm]		[‰]	[mm]		[‰]	[mm]		[‰]
1		5,06	+16,5		3,52	+18,2		3,41	+16,2
2		4,91	+13,0		3,54	+19,0		3,33	+13,5
3	4,34	5,06	+16,5	2,97	3,53	+18,6	2,94	3,42	+16,3
4		4,79	+10,2		3,50	+17,5		3,29	+12,0

M(=) Meßwert ; R(=) Rechenwerte

Eine völlige Übereinstimmung kann wahrscheinlich in keinem Fall erzielt werden, da bei den Modellversuchen von Sommerfeld keine Angaben über die Lagerung des Modells gemacht werden und Nachrechnungen zeigen, daß eine Behinderung der Längsverschieblichkeit an beiden Endquerträgern die Durchbiegungen entscheidend beeinflussen.

Die maximale Rechenzeit beträgt bei Raster 2 : 2736 sec, die nach Abschnitt 3.8 für diesen Fall geschätzte 2755 sec.

4.2 Nachrechnung der Torsionsversuche von Kordina/Waubke [3]

In [3] wird über Torsionsversuche an Gipsmodellen verschiedener Plattenbalkenquerschnitte nach Bild 17 berichtet, bei denen die Krafteinleitung über einbetonierte Betonstähle erfolgte.

Bild 18 zeigt zwei ausgewählte Querschnitte, die mit dem angegebenen Raster nachgerechnet wurden. Dabei ergab sich (Bild 19) wahrscheinlich wegen der einfacheren Lagerungsart des voll eingespannten Kragarmes eine wesentlich bessere Übereinstimmung als im Testfall 4.1

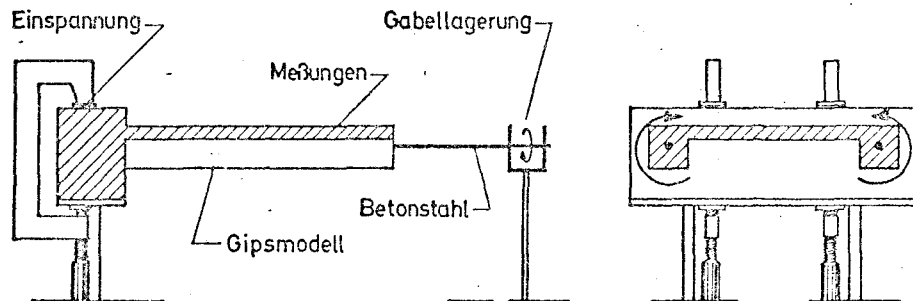


Bild 17

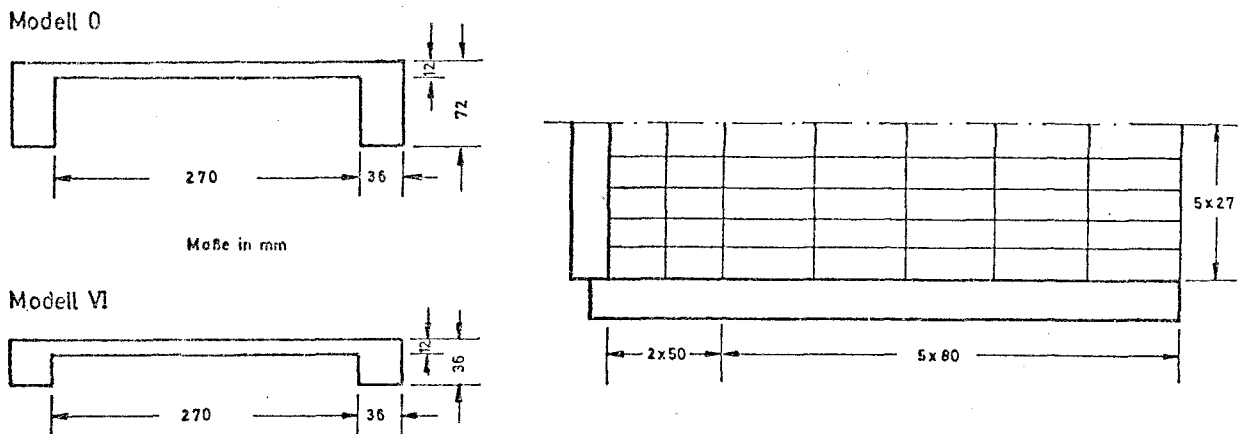


Bild 18

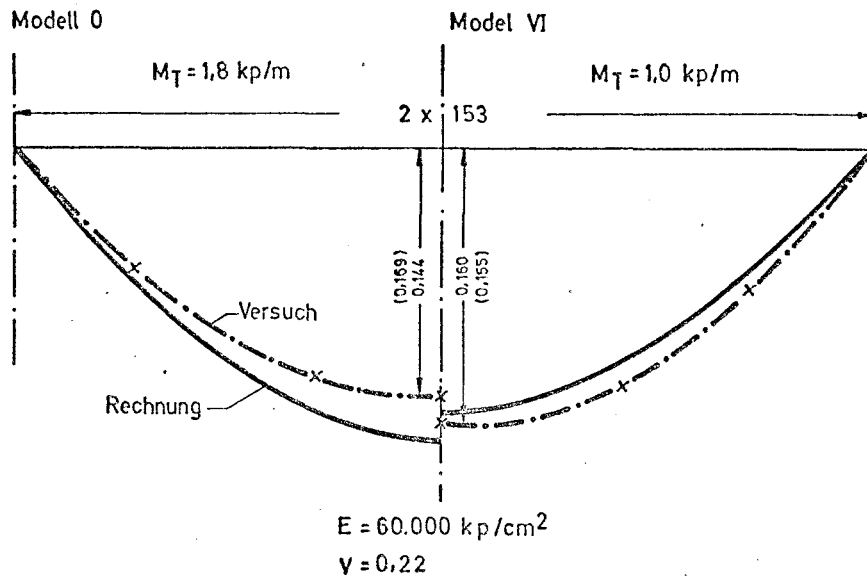


Bild 19

5. Zusammenfassung

Zur detaillierten Auswertung von Torsionsversuchen an Stahlbeton-Platten-Balken wurde ein Programm auf der Basis finiter Elemente entwickelt, das ganz allgemein Aufschluß über das Tragverhalten von orthogonalen und schiefen Plattenbalkensystemen geben kann. Die erreichte Rechengenauigkeit wird an Hand von vorliegenden Modellversuchen näher diskutiert und für praktische Belange als ausreichend befunden. Durch Umbau dieses Programmes zur Verwendung an einer Großrechenanlage lassen sich die Genauigkeitsanforderungen noch beträchtlich erhöhen.

L i t e r a t u r

- [1] Eibl, J.,
Iványi, G.: Zum Problem der dreiseitig gelagerten Platte
mit angreifenden Randmomenten.
Der Bauingenieur, 1969, Heft 11
- [2] Holand, J.,
Bell, K.: Finite Element Methods in Stress Analysis.
The Technical University of Norway, Trondheim
- [3] Kordina, K.,
Waubke, N.V.: Modellversuche an zweistegigen, monolithisch
endeingepannten Plattenbalken mit symmetrisch
tordierten Randbalken.
Bericht aus dem Institut für Baustoffkunde
und Stahlbetonbau der TU Braunschweig
(unveröffentlicht, Nr. 8806/9029, im Auftrage
des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton)
- [4] Sommerfeld, W.: Beitrag zur Theorie der Plattenbalkenbrücke.
Dissertation, TU Berlin, 1960
- [5] Tottenham, H.,
Brebbia, C.: Finite Element Techniques in Structural
Mechanics.
Proceedings of a Seminar at the University
of Southampton, April 1970
- [6] Zienkiewicz, O.C.,
Cheung, Y.K.: The Finite Element Method in Structural and
Continuum Mechanics.
McGraw-Hill Publishing Co. Ltd. London, 1967

Anlage

Auflösung großer, symmetrischer Gleichungssysteme
mit der Cholesky-Methode

- Programmbeschreibung -

1. Methode

Das lineare, inhomogene Gleichungssystem mit mehreren (i) rechten Seiten

$$(1)^+) \quad [A] \{x\}_i = \{b\}_i$$

soll nach der Cholesky-Methode aufgelöst werden, wobei vorausgesetzt wird:

$$(1a) \quad [A] \quad \text{symmetrisch, positiv definit}$$

$$(1b) \quad \{b\}_i \quad \text{mindestens ein } b_k \neq 0.$$

Die Lösung erfolgt nach diesem Verfahren in zwei Schritten,

a) einem ersten lastunabhängigen Schritt, wobei die Koeffizientenmatrix $[A]$ in eine obere $[S]$ und eine untere $[S]^T$ -Dreiecksmatrix⁺⁺⁾

$$(2) \quad [A] = [S]^T [S]$$

zerlegt wird.

b) in einem zweiten lastabhängigen Schritt, bei dem aus der Beziehung

$$[S]^T \underbrace{[S] \{x\}_i}_{\{f\}_i} = \{b\}_i \quad (\text{vgl. (1) und (2)})$$

$$(3) \quad [S]^T \{f\}_i = \{b\}_i$$

⁺⁾ $[\quad]$ - Klammer : Matrix
 $\{ \quad \}$ - Klammer : Vektor

⁺⁺⁾ $[\quad]^T$ - Transponierte Matrix

zunächst die Hilfsvektoren $\{f\}_i$ - Vorwärtslösung - und danach aus

$$(4) \quad [S]\{x\}_i = \{f\}_i$$

die Lösungsvektoren $\{x\}_i$ - Rückwärtslösung - ermittelt werden.

2. Numerische Durchführung, Speicherbedarf

Wegen der Voraussetzung einer symmetrischen Matrix $[A]$ der Größe $n \times n$ genügt es, nur $n(n+1)/2$ Koeffizienten spaltenweise zu speichern. Diese werden im Verlaufe der Dreieckszerlegung durch die Koeffizienten der Matrix $[S]$ überschreibt. Für die rechten Seiten muß ein Vektor der Länge n bereitgestellt werden, der zuerst durch die modifizierte rechte Seite $\{f\}_i$ und danach durch den Lösungsvektor $\{x\}_i$ überschreibt wird.

Für die numerische Durchführung der Lösung bestehen in Abhängigkeit von der Besetzung der Matrix $[A]$ grundsätzlich zwei Möglichkeiten:

a) Direktlösung - für annähernd voll besetzte Matrizen

In diesem Fall kann an eine Anlage IBM 1130-16K ein Gleichungssystem bis zu 110 Unbekannten mit beliebig vielen rechten Seiten ohne Inanspruchnahme des Plattenspeichers gelöst werden.

Der Zeitbedarf für den lastunabhängigen ersten Schritt beträgt

$$0,5 \cdot 10^{-3} \cdot n^3 \text{ [sec]},$$

d.h. für die max. Anzahl von 110 Unbekannten ~ 11 Minuten. Der lastabhängige Schritt dürfte je Lastfall etwa 10 % der oben genannten Zeit betragen.

b) Lösung für Bandstrukturen - für wenig besetzte Matrizen

Die meisten statischen Probleme lassen sich bei Verwendung

der Deformationsmethode auf eine tridiagonale Hypermatrix - Bandstruktur zurückführen.

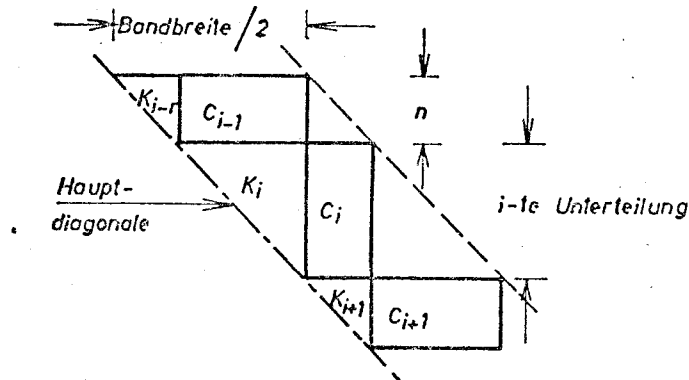


Bild 1

Die einzelnen Hypermatrizen $[K]_i$ sind dabei von quadratischer $n_i \times n_i$, die $[C]_i$ hingegen von beliebiger Art $n_i \times n_i + 1$.

In solchen Fällen ist es zweckmäßig, bei der Lösung - unter Zuhilfenahme externer Speicher - "unterteilungsweise" vorzugehen, wofür an einer Rechenanlage IBM 1130-16K eine halbe Bandbreite (vgl. Bild 1) von max. 120 gewählt werden kann.

Der Zeitbedarf des lastunabhängigen Teils der Lösung beträgt

$$3,2 \cdot 10^{-3} \cdot (n^3) \text{ [sec]}.$$

Bei der maximalen Ausnutzung des Kernspeichers - $n = 60$ - resultiert daraus eine Rechenzeit von ~ 12 Minuten. Für die Lastseite erhöht sich der Zeitbedarf im Vergleich zur Direktlösung von $\sim 10\%$ auf $\sim 18 - 22\%$. Dies hängt mit der Zugriffszeit des Plattenspeichers zusammen.

Eine erhebliche Reduzierung der Rechenzeit ist zu erreichen, wenn die tatsächlich meist unvollständige Besetzung der $[C]_i$ -Matrizen berücksichtigt wird. Die einfachste Möglichkeit hierfür besteht darin, eine unterschiedliche "interne Bandbreite" parallel zur Hauptdiagonale (vgl. Bild 2) zu definieren.

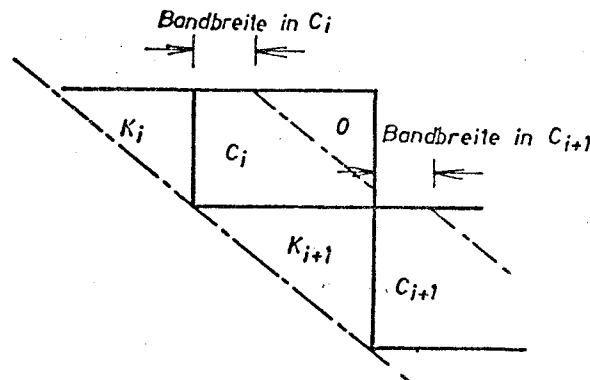


Bild 2

Hierdurch wird die eigentliche Bandbreite nach Bild 1 beträchtlich verringert. Zu beachten ist nur, daß die interne Bandbreite dem Charakter der $[C]_i$ -Matrix entsprechen muß, da sie stets unter 45° verläuft (vgl. Bild 3).

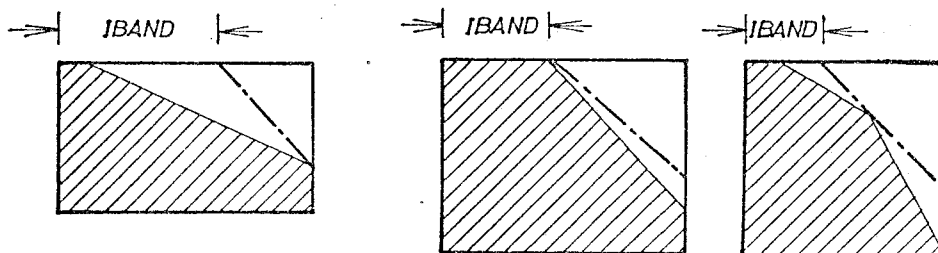


Bild 3

Untersuchungen für den Zeitbedarf ergaben, daß dieser nahezu linear mit kleiner werdender interner Bandbreite (n_i) abnimmt. So beträgt für $n = 65$ und $n_i = 1$ die Rechenzeit nur noch 45 % der ursprünglich erforderlichen. Im unteren Bereich $n_i < n/3$ gilt näherungsweise

$$1,4 \cdot 10^{-3} n^3 + 10,0 n_i \text{ [sec]}.$$

Allgemein kann in etwa von einem Zeitbedarf von

$$2,1 \cdot 10^{-3} n^3 \text{ [sec]}$$

ausgegangen werden.

Zu bemerken ist, daß der Zeitbedarf an Rechenanlagen der "dritten" Generation nur den fünfzigsten bis siebzigsten Teil hiervon beträgt, d.h. daß der für eine IBM 1130 in Minuten angegebene Wert an Großrechenanlagen Sekunden entspricht.

3. Beschreibung der Unterprogramme

Für die Durchführung der Lösung stehen 4 Unterprogramme zur Verfügung, die in einem beliebigen Hauptprogramm (Flußdiagramme in Abschnitt 4) aufgerufen werden können, da sie keinen COMMON-Bereich und keine festen DIMENSIONS-Grenzen enthalten. Letzteres bedingt allerdings, daß die Eingangsmatrix(-zen) linear gespeichert zur Verfügung steht. Eine evtl. erforderliche Umspeicherung feldweise hergestellter Koeffizientenmatrizen kann mit folgenden Umrechnungsformeln durchgeführt werden:

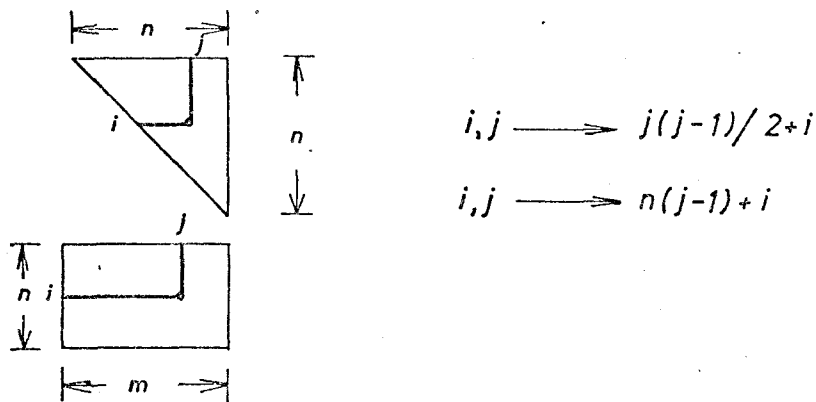


Bild 4

a) SUBROUTINE SYMZ1 (K,NK,C,NC)

Argumentenliste:

K - real, enthält die Koeffizienten der oberen Hälfte einer symmetrischen Matrix, spaltenweise gespeichert;

NK - Anzahl der Zeilen (= Spalten) in K;

- C - real, enthält die bereits zerlegten Koeffizienten einer C_{i-1} -Matrix nach Bild 1, spaltenweise gespeichert;
- NC - Anzahl der Zeilen in C_{i-1} .

Anzahl der Glieder

in K $NK \times (NK+1)/2$

in C $NK \times NC$

Der Aufruf dieses Unterprogramms bewirkt die Dreieckszerlegung im Bereiche der K_i -Matrix nach Bild 5:

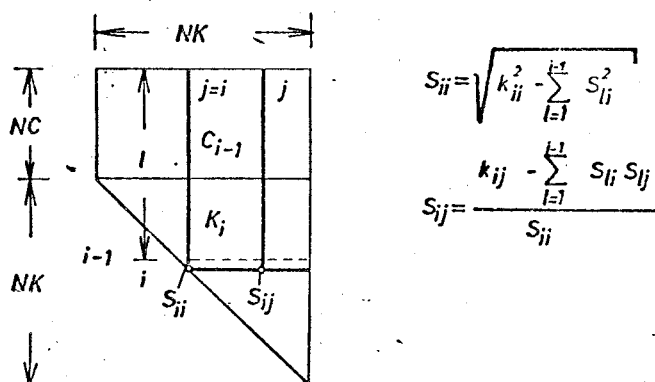


Bild 5

Voraussetzung ist, daß die Zerlegung im Bereich der C_{i-1} Matrix bereits durchgeführt wurde.

Im Falle einer Direktlösung (vgl. Abschnitt 2a)) muß $NC=0$ gesetzt werden. Hierdurch wird erreicht, daß für die Zerlegung nur die Koeffizienten im Bereich der K_i -Matrix benutzt werden. In der Argumentenliste muß dennoch eine mindestens $C(1)$ (Schein-)Größe stehen.

b) SUBROUTINE SYMZ2 (K,NK,C,NC)

Argumentenliste:

- K, NK - vgl. SYMZ1;
 C - real, enthält die Koeffizienten einer C_i Matrix (Hypermatrix neben K_i) nach Bild 1, spaltenweise gespeichert;
 NC - Anzahl der Spalten in C_i .

Anzahl der Glieder: wie bei SYMZ1.

Der Aufruf dieses Unterprogrammes bewirkt die Dreieckszerlegung im Bereich der C_i -Matrix nach Bild 6:

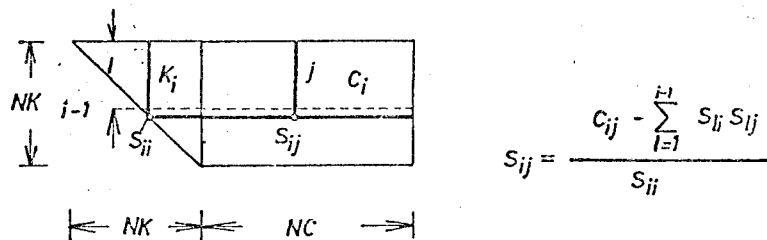


Bild 6

Voraussetzung ist, daß die Zerlegung im Bereich der K_i -Matrix bereits erfolgte.

c) SUBROUTINE SYMZ3 (K,VK,NK,C,VC,NC)

Argumentenliste:

- K,NK,C,NC - wie bei SYMZ1;
 VK - Vektor der Länge NK, enthält die rechte Seite im Bereich der i-ten Unterteilung nach Bild 1;
 VC - Vektor der Länge NC, enthält die modifizierte rechte Seite (vgl. Gl. (3)) im Bereich der i-1-ten Unterteilung.

Der Aufruf dieses Unterprogrammes bewirkt die Ermittlung der modifizierten rechten Seite im Bereich der i-ten Unterteilung nach Bild 7.

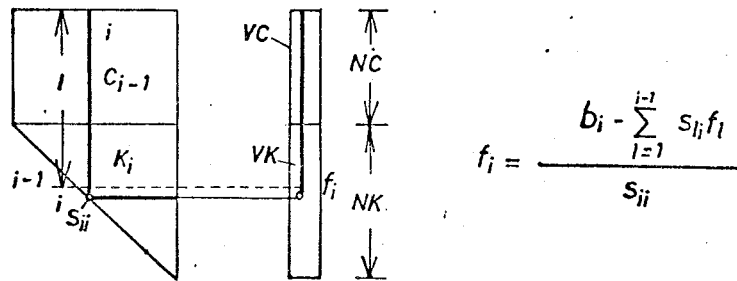


Bild 7

Vorausgesetzt ist dabei, daß die Ermittlung der modifizierten rechten Seite im Bereich der i-1-ten Unterteilung bereits erfolgt ist.

Im Falle einer Direktlösung (vgl. Abschnitt 2a)) muß $NC=0$ gesetzt werden. Dennoch müssen auch hier in der Argumentenliste mindestens $C(1)$ und $VC(1)$ (Schein-)Größen stehen.

a) SUBROUTINE SYMZ4 (K,VK,NK,C,VC,NC)

Argumentenliste:

K,NK,C,NC - wie bei SYMZ2;

VK - Vektor der Länge NK, enthält die modifizierte rechte Seite im Bereich der i-ten Unterteilung;

VC - Vektor der Länge NC, enthält die Lösung im Bereich der i+1-ten Unterteilung.

Der Aufruf dieses Unterprogramms bewirkt die Ermittlung der Lösung im Bereich der i-ten Unterteilung nach Bild 8.

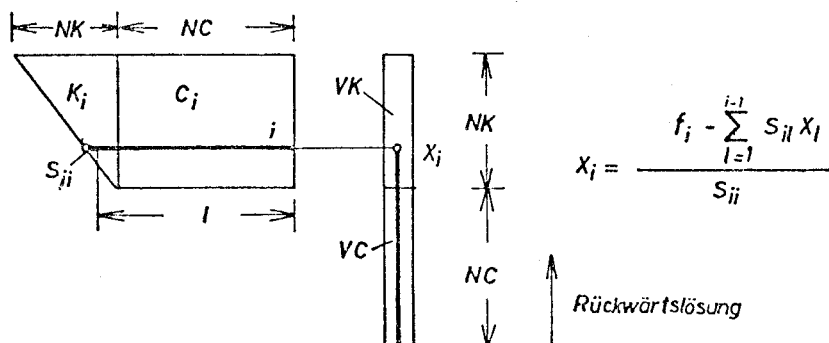


Bild 8

Voraussetzung ist, daß der Lösungsvektor im Bereich der $i+1$ -ten Unterteilung bereits bekannt ist.

Für den Fall einer Direktlösung gelten die Regeln nach b).

Alternativlösung unter Berücksichtigung der internen Bandbreite in den C_i -Matrizen.

e) SUBROUTINE SYMB1 (K, NK, C, NC, I BAND)

Argumentenliste:

K, NK, C, NC - wie bei SYMZ1

IBAND - interne Bandbreite in der C_{i-1} -Matrix,
nach Bild 2.

Es gelten die Beziehungen (5) und (6). Beim Fortschreiten nach rechts beginnt die Schleife mit dem Index ℓ so lange bei $\ell = 1$, bis die interne Begrenzung der Bandbreite erreicht wird; danach erhöht er sich jeweils um eins.

f) SUBROUTINE SYMB2 (K, N, K, C, NC, IBAND)

Argumentenliste - vgl. SYMB1

In Gleichung (7) ist der Beginn der Schleife mit dem Index ℓ entsprechend, wie unter e) beschrieben, veränderlich.

4. Flußdiagramme für die einzelnen Lösungsarten

4.1 Direktlösung

Im Falle der Direktlösung besteht der Programmablauf aus dem einmaligen Aufruf des Unterprogramms SYMZ1 und aus dem i -maligen Aufruf von SYMZ3 und SYMZ4.

```
DIMENSION A(NK (NK+1)/2),B(NK),C(1),CC(1)
```

```
READ NK,A
↓
NC=0
↓
CALL SYMZ1(A,NK,C,NC)
↓
READ IRECH
↓
READ B
↓
CALL SYMZ3(A,B,NK,C,CC,NC)
↓
CALL SYMZ4(A,B,NK,C,CC,NC)
↓
WRITE B
↓
IRECH=IRECH-1
↓
Abfrage IRECH
    ↓
    =0
    ↓
STOP
```

IRECH ≠ 0

Hierin bedeuten:

IRECH	Anzahl der rechten Seiten
NK	Anzahl der Unbekannten
A	Koeffizientenmatrix
B	Rechte Seite bzw. Lösung
C,CC	Scheingrößen

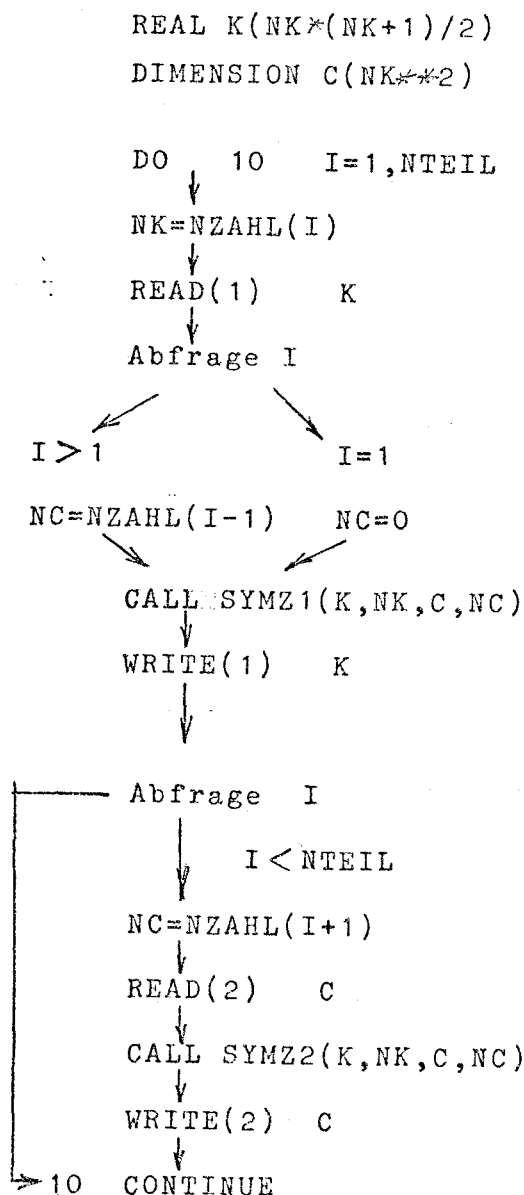
4.2 Lösung für Bandstrukturen

Im Falle einer Bandmatrix müssen sowohl die Eingangsgrößen als auch die Ergebnisse auf externen Speichergeräten bereitgestellt werden. Bei Benutzung eines Plattenspeichers sind 3 FILES zu definieren:

FILE 1	-	K_i -Matrizen
FILE 2	-	C_i -Matrizen
FILE 3	-	rechte Seite (-n), Lösung (-en)

Zur zeitunabhängigen Berechnung mehrerer Lastfälle ist es empfehlenswert, den Lösungsablauf in zwei getrennte Schritte (vgl. Abschnitt 1) aufzuspalten. Der dadurch erforderliche Mehrbedarf an Plattenbefehlen wird bei weitem durch den Vorteil aufgehoben, daß dann der lastabhängige Schritt jeweils separat durchgeführt werden kann, was bei Iterationsprozessen u.U. unumgänglich ist.

Der lastunabhängige Teil verläuft wie folgt:

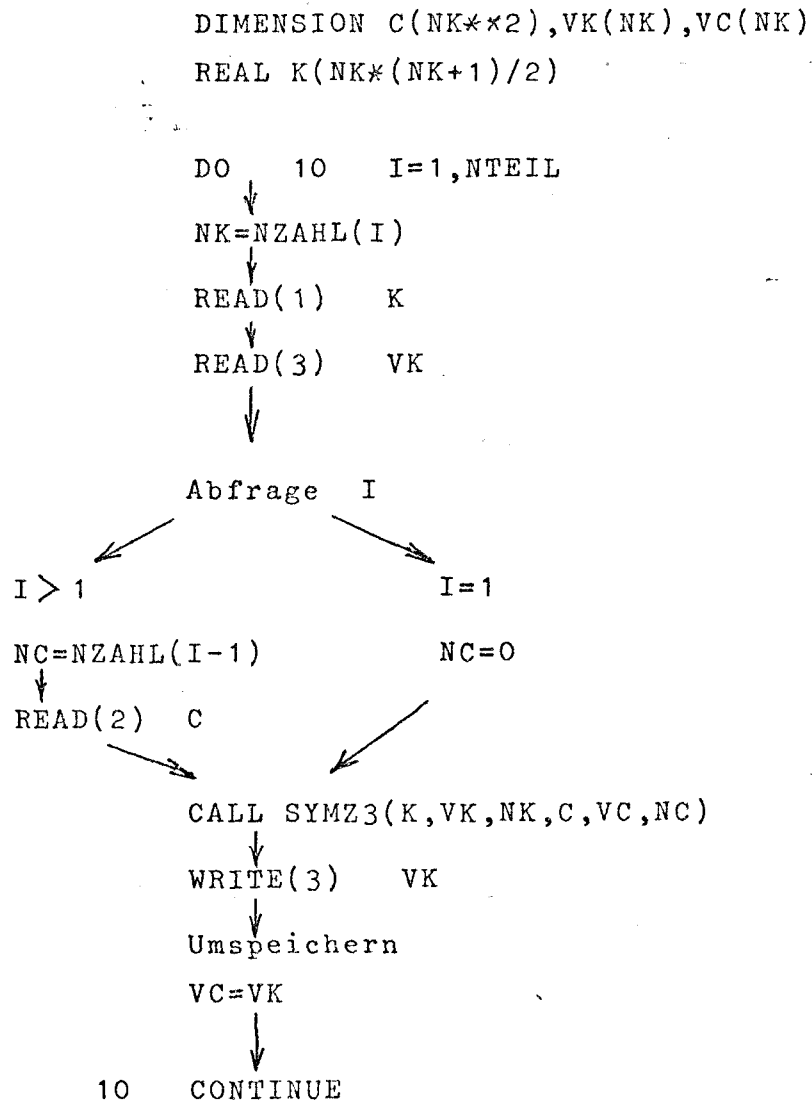


Hierin sind:

NTEIL	Anzahl der Unterteilungen
NZAHL(I)	Anzahl der Zeilen in der i-ten Unterteilung
NK	max(NZAHL(I))
K	Hypermatrix in der Hauptdiagonale
C	Hypermatrix in der Nebendiagonale

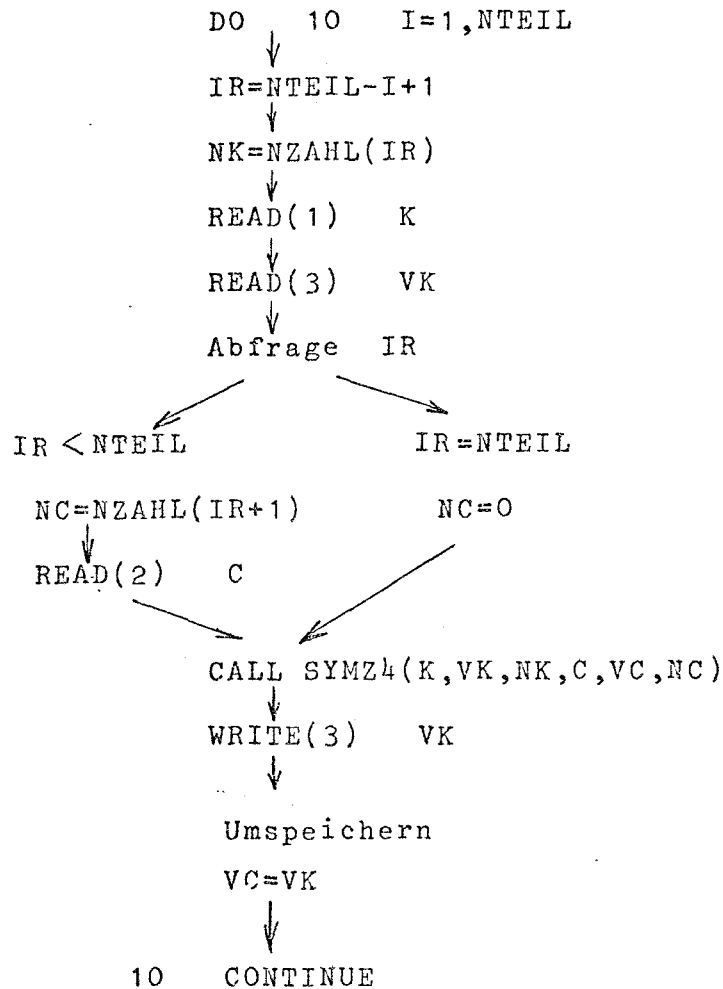
Der lastabhängige Teil gliedert sich in zwei weitere Teile:

Vorwärtslösung



Rückwärtslösung

DIMENSION und REAL wie oben



Außer den bereits erläuterten Größen sind hierin:

VK,VC	Vektoren für rechte Seite und Lösung;
IR	Zähler für die Rückwärtslösung.

Die Alternativlösung unter Berücksichtigung einer internen Bandbreite in C_1 verläuft für den lastunabhängigen Teil nach demselben Flußdiagramm; lediglich die entsprechenden Unterprogramme SYMZ1 und SYMZ2 müssen durch SYMB1 und SYMB2 ersetzt werden. Die Größen IBAND können für jede Unterteilung in einem Vektor KBAND(I) zusammengefaßt werden. Dieser ist bis NTEIL-1 zu dimensionieren.

5. Liste der Unterprogramme

```

C      SUBROUTINE SYMZ1(K,NK,C,NC)
C
C      -----
C      UNTERPROGRAMM S Y M Z 1 ERMITTELT DIE
C      KOEFFIZIENTEN DER DREIECKSMATRIX IM BEREICH
C      DER IN DER HAUPTDIAGONALE LIEGENDEN HYPERMATRIX
C      -----
C
C      UEBERTRAGENE GROESSEN***
C
C          K    HYPERMATRIX IN DER HAUPTDIAGONALE
C
C          NK   ANZAHL DER ZEILEN BZW. DER
C               SPALTEN IN DER K-MATRIX
C
C          C    HYPERMATRIX UEBER K
C
C          NC   ANZAHL DER ZEILEN  IN DER C-MATRIX
C
C      IN BEIDEN MATRIZEN WERDEN DIE GLIEDER
C      LINEAR,NACH FOLGENDEN FORMELN  GESPEICHERT
C
C          IN K(I,J)  IJ=J*(J-1)/2+I
C          IN C(I,J)  IJ=NC*(J-1)+I
C
C      IM VERLAUFE DER ERMITTLUNG DER NEUEN
C      KOEFFIZIENTEN IM BEREICH DER K-MATRIX
C      WERDEN DIE EINGANGSKOEFFIZIENTEN UEBERSPEICHERT
C
C      REAL K(1)
C      DIMENSION C(1)
C
C      -----
C      AEUSSERE SCHLEIFE - ZEILEN IN K
C      -----
C
C      DO 10 I=1,NK
C      II=I*(I-1)/2+I
C
C      ABFRAGE ERSTER K-MATRIX
C      IF(NC) 25,25,24
C
C      -----
C      ERMITTLUNG DER DIAGONALGLIEDER
C      -----
C
C      ZEILENSCHLEIFE IN C
C      24 DO 20 IC=1,NC
C          ICI=NC*(I-1)+IC
C      20 K(II)=K(II)-C(ICI)**2
C
C      ABFRAGE ERSTER ZEILE
C      25 IF(I-1) 21,21,22
C
C      ZEILENSCHLEIFE IN K
C      22 IM1=I-1
C          DO 23 IK=1,IM1
C          IKI=I*(I-1)/2+IK
C      23 K(II)=K(II)-K(IKI)**2
C
C      DIAGONALGLIED
C      21 K(II)=SQRT(K(II))
C
C      ABFRAGE LETZTER ZEILE
C      IF (I-NK) 11,10,10

```

```

C
C -----
C          ERMITTLUNG DER ZEILENGLIEDER
C -----
C
11 IP1=I+1
   DO 30 J=IP1,NK
     IJ=J*(J-1)/2+I
C
C          ABFRAGE ERSTER K-MATRIX
C          IF(NC) 35,35,34
C          ZEILENSCHLEIFE IN C
34 DO 31 LC=1,NC
     LCI=NC*(I-1)+LC
     LCJ=NC*(J-1)+LC
31 K(IJ)=K(IJ)-C(LCI)*C(LCJ)
C
C          ABFRAGE ERSTER ZEILE
C          35 IF(I-1) 30,30,32
C          ZEILENSCHLEIFE IN K
32 DO 33 LK=1,IM1
     LKI=I*(I-1)/2+LK
     LKJ=J*(J-1)/2+LK
33 K(IJ)=K(IJ)-K(LKI)*K(LKJ)
C
C          ZEILENGLIED
30 K(IJ)=K(IJ)/K(II)
C
C
10 CONTINUE
C
C
C          RETURN
C
C          END

```

```

C      SUBROUTINE SYMZ2(K,NK,C,NC)
C
C      -----
C      UNTERPROGRAMM S Y M Z 2 ERMITTELT DIE
C      KOEFFIZIENTEN DER DREIECKSMATRIX IM BEREICH
C      DER IN DER NERENDIAGONALE LIEGENDEN HYPERMATRIX
C      -----
C
C      UEBERTRAGENE GROESSEN***
C
C          K      HYPERMATRIX IN DER HAUPTDIAGONALE
C
C          NK     ANZAHL DER ZEILEN BZW. DER
C                  SPALTEN IN DER K-MATRIX
C
C          C      HYPERMATRIX NEBEN K
C
C          NC     ANZAHL DER SPALTEN IN DER C-MATRIX
C
C      IN BEIDEN MATRIZEN WERDEN DIE GLIEDER
C      LINEAR, NACH FOLGENDEN FORMELN GESPEICHERT
C
C          IN K(I,J)    IJ=J*(J-1)/2+I
C          IN C(I,J)    IJ=NK*(J-1)+I
C
C      IM VERLAUFE DER ERMITTLUNG DER NEUEN
C      KOEFFIZIENTEN IM BEREICH DER C-MATRIX
C      WERDEN DIE EINGANGSKOEFFIZIENTEN UEBERSPEICHERT
C
C      REAL K(1)
C      DIMENSION C(1)
C
C      -----
C      AEUSSERE SCHLEIFE - ZEILEN IN K BZW.C
C      -----
C
C      DO 10 I=1,NK
C      I1=I*(I-1)/2+I
C
C      -----
C      INNERE SCHLEIFE - SPALTEN IN C
C      -----
C
C      DO 20 J=1,NC
C      IJ=NK*(J-1)+I
C
C      IF(I-1) 20,20,22      ABFRAGE ERSTER ZEILE
C
C      IF(I-1) 20,20,22      ZEILENSCHLEIFE
C
C      22 IM1=I-1
C      DO 23 L=1,IM1
C      LK1=I*(I-1)/2+L
C      LCJ=NK*(J-1)+L
C      23 C(IJ)=C(IJ)-K(LK1)*C(LCJ)
C
C      BILDUNG NEUER GLIEDER
C      20 C(IJ)=C(IJ)/K(I1)
C
C      10 CONTINUE
C
C      RETURN
C
C      END

```

```

C
C
C      SUBROUTINE SYMZ3 (K,VK,NK,C,VC,NC)
C
C-----
C      UNTERPROGRAMM S Y M Z 3  ERMITTELT DIE
C      NEUEN LASTVEKTOREN FUER JEDEN LASTFALL
C-----
C
C      UEBERTRAGENE GROESSEN***
C
C          K   HYPERMATRIX IN DER HAUPTDIAGONALE
C
C          VK   LASTVEKTOR IM BEREICHE VON K
C
C          NK   ANZAHL DER ZEILEN BZW.
C               SPALTEN IN DER K-MATRIX
C
C          C   HYPERMATRIX UEBER K
C
C          VC   LASTVEKTOR IM BEREICHE VON C
C
C          NC   ANZAHL DER ZEILEN IN
C               DER C-MATRIX
C
C      IN BEIDEN MATRIZEN WERDEN DIE GLIEDER
C      LINEAR, NACH FOLGENDEN FORMELN GESPEICHERT
C
C          IN K (I,J)  IJ=J*(J-1)/2+I
C          IN C (I,J)  IJ=NC*(J-1)+I
C
C      IM VERLAUFE DER ERMITTLUNG DER NEUEN
C      KOEFFIZIENTEN VON VK WERDEN DIE
C      URSPRUENGLICHEN LASTGLIEDER UEBERSPEICHERT
C
C
C      REAL K(1)
C      DIMENSION VK(1),C(1),VC(1)
C
C-----
C          AEUSSERE SCHLEIFE - ZEILEN IN VK
C-----
C
C      DO 10 I=1,NK
C      II=I*(I-1)/2+I
C
C          ABFRAGE ERSTER K-MATRIX
C      IF(NC) 25,25,24
C
C          ZEILENSCHLEIFE IN C
C      24 DO 20 IC=1,NC
C          ICI=NC*(I-1)+IC
C      20 VK(I)=VK(I)-C(ICI)*VC(IC)
C
C          ABFRAGE ERSTER ZEILE
C      25 IF(I-1) 10,10,22
C
C          ZEILENSCHLEIFE IN K
C      22 IM1=I-1
C          DO 23 IK=1,IM1
C          IKI=I*(I-1)/2+IK
C      23 VK(I)=VK(I)-K(IKI)*VK(IK)
C
C          BILDUNG NEUER GLIEDER
C      10 VK(I)=VK(I)/K(II)
C
C      RETURN
C
C      END

```

```

C      SUBROUTINE SYMZ4 (K,VK,NK,C,VC,NC)
C
C      -----
C      UNTERPROGRAMM S Y M Z 4 FUEHRT DIE
C      RUECKWAERTSLOESUNG FUER EINEN LASTFALL DURCH
C      -----
C
C      UEBERTRAGENE GROESSEN***
C
C          K    HYPERMATRIX IN DER DIAGONALE
C
C          VK    LASTVEKTOR IM BEREICHE VON K
C
C          NK    ANZAHL DER ZEILEN BZW.
C                SPALTEN IN DER DER K-MATRIX
C
C          C    HYPERMATRIX NEBEN K
C
C          VC    LOESUNGSVEKTOR IM BEREICHE VON C
C
C          NC    ANZAHL DER SPALTEN IN
C                DER C-MATRIX
C
C      IN BEIDEN MATRIZEN WERDEN DIE GLIEDER
C      LINEAR, NACH FOLGENDEN FORMELN GESPEICHERT
C
C          IN K (I,J)    IJ=J*(J-1)/2+I
C          IN C (I,J)    IJ=NK*(J-1)+I
C
C      IM VERLAUFE DER RUECKWAERTSLOESUNG WERDEN
C      DIE LASTGLIEDER IN VEKTOR VK UEBERSPEICHERT
C
C
C      REAL K(1)
C      DIMENSION VK(1),C(1),VC(1)
C
C      -----
C          AEUSSERE SCHLEIFE - ZEILEN IN VK
C      -----
C
C      DO 10 I=1,NK
C      IR=NK-I+1
C      IRIR=IR*(IR-1)/2+IR
C
C          IF(NC) 25,25,24      ABFRAGE LETZTER K-MATRIX
C
C          SPALTENSCHLEIFE IN C
C
C      24 DO 20 IC=1,NC
C          IRIC=IK*(IC-1)+IR
C      20 VK(IR)=VK(IR)-VC(IC)*C(IRIC)
C
C          ABFRAGE LETZTER ZEILE
C
C      25 IF(IR-NK) 22,10,10
C
C          SPALTENSCHLEIFE IN K
C
C      22 IP1=IR+1
C      DO 23 IK=IP1,NK
C          IRIK=IK*(IK-1)/2+IR
C      23 VK(IR)=VK(IR)-VK(IK)*K(IRIK)
C
C          BILDUNG NEUER GLIEDER
C
C      10 VK(IR)=VK(IR)/K(IRIR)
C
C      RETURN
C
C      END

```



```

C      IF(I-IBAND) 26,27,27      ABFRAGE BANDBREITE
27 NC1=I-IBAND+1
C      ZEILENSCHLEIFE IN C
26 DO 20 IC=NC1,NC
    IC1=NC*(I-1)+IC
20 K(II)=K(II)-C(IC1)**2
C      ABFRAGE ERSTER ZEILE
25 IF(I-1) 21,21,22
C      ZEILENSCHLEIFE IN K
22 IM1=I-1
    DO 23 IK=1,IM1
    IK1=I*(I-1)/2+IK
23 K(II)=K(II)-K(IK1)**2
C      DIAGONALGLIED
21 K(II)=SQRT(K(II))
C      ABFRAGE LETZTER ZEILE
    IF (I-NK) 11,10,10
C
C      -----
C      ERMITTLUNG DER ZEILENGLIEDER
C      -----
C
11 IP1=I+1
    DO 30 J=IP1,NK
    IJ=J*(J-1)/2+I
C      ABFRAGE ERSTER K-MATRIX
    IF(NC) 35,35,34
34 NC1=1
C      ABFRAGE BANDBREITE
    IF(J-IBAND) 36,37,37
37 NC1=J-IBAND+1
C      ZEILENSCHLEIFE IN C
36 DO 31 LC=NC1,NC
    LC1=NC*(I-1)+LC
    LCJ=NC*(J-1)+LC
31 K(IJ)=K(IJ)-C(LC1)*C(LCJ)
C      ABFRAGE ERSTER ZEILE
35 IF(I-1) 30,30,32
C      ZEILENSCHLEIFE IN K
32 DO 33 LK=1,IM1
    LK1=I*(I-1)/2+LK
    LKJ=J*(J-1)/2+LK
33 K(IJ)=K(IJ)-K(LK1)*K(LKJ)
C      ZEILENGLIED
30 K(IJ)=K(IJ)/K(II)
C
C
10 CONTINUE
C
C      RETURN
C
    END

```

SUBROUTINE SYMB2 (K,NK,C,NC,IBAND)

 UNTERPROGRAMM S Y M B 2 ERMITTELT DIE
 KOEFFIZIENTEN DER DREIECKSMATRIX IM BEREICH
 DER IN DER NERENDIAGONALE LIEGENDEN HYPERMATRIX
 UNTER BERUECKSICHTIGUNG DER MINIMALEN BANDBREITE

UEBERTRAGENE GROESSEN***

K HYPERMATRIX IN DER HAUPTDIAGONALE

NK ANZAHL DER ZEILEN BZW. DER
 SPALTEN IN DER K-MATRIX

C HYPERMATRIX NEBEN K

NC ANZAHL DER SPALTEN IN DER C-MATRIX

IBAND BANDBREITE IN DER C-MATRIX
 (VGL. ERLAEUTERUNGEN)

IN BEIDEN MATRIZEN WERDEN DIE GLIEDER
 LINEAR, NACH FOLGENDEN FORMELN GESPEICHERT

IN K(I,J) IJ=J*(J-1)/2+I
 IN C(I,J) IJ=NK*(J-1)+I

IM VERLAUFE DER ERMITTLUNG DER NEUEN
 KOEFFIZIENTEN IM BEREICH DER C-MATRIX
 WERDEN DIE EINGANGSKOEFFIZIENTEN UEBERSPEICHERT

REAL K(1)
 DIMENSION C(1)

 AEUSSERE SCHLEIFE - ZEILEN IN K BZW. C

NC1=IBAND-1
 DO 10 I=1,NK
 II=I*(I-1)/2+I

 INNERE SCHLEIFE - SPALTEN IN C

NC1=NC1+1

ABFRAGE SPALTENANZAHL

IF(NC1-NC) 24,24,25

25 NC1=NC


```
24 DO 20 J=1,NC1
    IJ=NK*(J-1)+1
C      IF(I-1) 20,20,22      ABFRAGE ERSTER ZEILE
22 L1=1
C      IF(J-IBAND) 26,27,27  ABFRAGE BANDBREITE
27 L1=J-IBAND+1
C      ZEILENSCHLEIFE
26 IM1=I-1
C      ABFRAGE LETZTES ZEILENGLIED
    IF(L1-IM1) 28,28,20
28 DO 23 L=L1,IM1
    LKI=I*(I-1)/2+L
    LCJ=NK*(J-1)+L
23 C(IJ)=C(IJ)-K(LKI)*C(LCJ)
C      BILDUNG NEUER GLIEDER
20 C(IJ)=C(IJ)/K(IJ)
C
C
C 10 CONTINUE
C
C      RETURN
C
C      END
```

